

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. In der Gruppe S_8 seien die beiden Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Berechnen Sie σ^{2020} sowie σ^{-1} und τ^{-1} .
- Bestimmen Sie α und $\beta \in S_8$ mit $\sigma \circ \alpha = \tau$ und $\beta \circ \sigma = \tau$.
- Stellen Sie σ und τ als Produkt von Transpositionen dar und bestimmen Sie $\text{sign}(\sigma)$ und $\text{sign}(\tau)$. Gibt es ein $\psi \in S_8$ mit $\sigma \circ \psi = \psi \circ \tau$?
- In S_8 betrachten wir nun das Produkt

$$\rho = (2 \ 5 \ 4 \ 3 \ 8) \circ (2 \ 6 \ 1 \ 4) \in S_8.$$

Bestimmen Sie die Ordnung von ρ .

2. Bestimmen Sie für $k = 0$ und $k = 1$ die Anzahl der Permutationen in S_6 mit genau k Fixpunkten.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sign}(\sigma) = 1\} \subset S_n$. Wir betrachten die Abbildung

$$f : S_n \longrightarrow S_n, \quad f(\sigma) = \sigma \circ (1 \ 2).$$

- Zeigen Sie, daß f bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung f^{-1} an.
 - Zeigen Sie, daß $f(A_n) = S_n \setminus A_n$.
 - Folgern Sie, daß für die Mächtigkeit von A_n gilt $|A_n| = \frac{n!}{2}$.
4. a) Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Wie viele Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ gibt es?
 - Wie viele **injektive** Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ gibt es?
 - Wie viele **surjektive** Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ gibt es?
- b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X_n eine Menge mit n Elementen, also $|X_n| = n$. Für $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$, sei $a_{n,k}$ die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : X_n \longrightarrow X_k$. Berechnen Sie unter Verwendung der Formel

$$a_{nk} = k^n - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \cdot a_{ni}$$

(können Sie dies mit kombinatorischen Überlegungen beweisen?) die Anzahl der surjektiven Abbildungen

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}.$$